Capítulo 4

Linear Associator.

4.1. Contexto.

El siguiente acontecimiento trascendente después de los trabajos pioneros de la década de los sesenta, la *Lernmatrix* (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961) y el *Correlograph* (Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins, 1969), sucedió a principios de la década de los setenta, en 1972.

El año de 1972 fue testigo de una febril actividad de los investigadores pioneros en memorias asociativas. Para corroborar esta aserción, baste dar una vistazo a los items bibliográficos enlistados en la Introducción, donde se puede observar que cuatro de los primeros trabajos sobre modelos matemáticos para memorias asociativas se publicaron en revistas internacionales precisamente en las ediciones de ese año.

Apoyado por la *UCLA*, James A. Anderson prendió la mecha con su *Interactive Memory* (Anderson, 1972); en abril, Teuvo Kohonen, a la sazón profesor de la *Helsinki University of Technology*, presentó ante el mundo sus *Correlation Matrix Memories* (Kohonen, 1972); tres meses después, Kaoru Nakano de la *University of Tokyo*, dio a conocer su *Associatron* (Nakano, 1972); y en el ocaso del año, Shun-Ichi Amari, profesor de la *University of Tokyo* y uno de los más prolíficos escritores de artículos científicos hasta nuestros días, publicó un trabajo teórico donde continuaba con sus investigaciones sobre las *Self-Organizing Nets of Threshold Elements* (Amari, 1972), tópico cuyo estudio había iniciado un par de años atrás. Este trabajo de Amari constituye una valiosa muestra del estilo teórico característico de este personaje y representa, históricamente, un importante antecedente para la creación de lo que una década más tarde se convertiría en el modelo de memoria asociativa por antonomasia: la memoria Hopfield.

Los trabajos de Anderson y Kohonen. y en cierta medida el de Nakano, dieron lugar al modelo que actualmente se conoce con el nombre genérico de *Linear Associator*, descrito precisanmente en este capítulo.

4.2. El trabajo de Anderson y Kohonen.

Después de la incursión en los terrenos de Steinbuch y Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins (ver contenidos de los capítulos 2 y 3), en este capítulo presentaremos los fundamentos del modelo que dio lugar al *Linear Associator*, el cual, como se había mencionado antes, tiene su origen en los trabajos pioneros de Anderson. Kohonen y Nakano publicados durante año 1972.

Es pertinente mencionar un hecho curioso, que se ha presentado en personajes dedicados a otras ramas de la ciencia: James A. Anderson y Teuvo Kohonen obtuvieron resultados *asombrosamente similares* a pesar de que trabajaron independientemente, alejados, y sin tener noticia uno del otro, hasta tiempo después de que aparecieron los artículos; además, estos autores tienen formaciones profesionales totalmente diferentes: Anderson es neurofisiólogo (estadunidense) y Kohonen es físico e ingeniero eléctrico (finlandés) (Anderson & Rosenfeld, 1990; Kohonen, 1989).

Penetremos en los recovecos del *Linear Associator*, y para ello consideremos el conjunto fundamental $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, ..., p\}$ con

$$\mathbf{x}^\mu = (x_1^\mu, x_2^\mu, ..., x_n^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \quad \text{y}$$

$$\mathbf{y}^\mu = (y_1^\mu, y_2^\mu, ..., y_m^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

La *fase de aprendizaje* consiste de dos etapas:

1.- Para cada una de las p asociaciones $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu)$ se encuentra la matriz $\mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t$ de dimensiones $m \times n$

$$\mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \cdot (x_1^\mu, x_2^\mu, ..., x_n^\mu)$$

$$\mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu x_1^\mu & y_1^\mu x_2^\mu & \cdots & y_1^\mu x_j^\mu & \cdots & y_1^\mu x_n^\mu \\ y_2^\mu x_1^\mu & y_2^\mu x_2^\mu & \cdots & y_2^\mu x_j^\mu & \cdots & y_2^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_i^\mu x_1^\mu & y_i^\mu x_2^\mu & \cdots & y_i^\mu x_j^\mu & \cdots & y_i^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m^\mu x_1^\mu & y_m^\mu x_2^\mu & \cdots & y_m^\mu x_j^\mu & \cdots & y_m^\mu x_n^\mu \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

2.- Se suman la p matrices para obtener la memoria

$$\mathbf{M} = \sum_{\mu=1}^{p} \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t = [m_{ij}]_{m \times n} \tag{4.2}$$

de manera que la ij-ésima componente de la memoria $\mathbf{M}$ se expresa así:

$$m_{ij} = \sum_{\mu=1}^{p} y_i^\mu x_j^\mu \tag{4.3}$$

La *fase de recuperación* consiste en presentarle a la memoria un patrón de entrada $\mathbf{x}^\omega$, donde $\omega \in \{1, 2, ..., p\}$ y realizar la operación

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^\omega = \left[\sum_{\mu=1}^{p} \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t \right] \cdot \mathbf{x}^\omega \tag{4.4}$$

Al desarrollar la sumatoria de la expresión 4.4, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}^{\omega} &= \left[\mathbf{y}^{1}\cdot(\mathbf{x}^{1})^{t}+\mathbf{y}^{2}\cdot(\mathbf{x}^{2})^{t}+\cdots+\mathbf{y}^{\omega}\cdot(\mathbf{x}^{\omega})^{t}+\cdots+\mathbf{y}^{p}\cdot(\mathbf{x}^{p})^{t}\right]\cdot\mathbf{x}^{\omega}\\
\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}^{\omega} &= \left[\mathbf{y}^{1}\cdot(\mathbf{x}^{1})^{t}\right]\cdot\mathbf{x}^{\omega}+\left[\mathbf{y}^{2}\cdot(\mathbf{x}^{2})^{t}\right]\cdot\mathbf{x}^{\omega}+\cdots+\left[\mathbf{y}^{\omega}\cdot(\mathbf{x}^{\omega})^{t}\right]\cdot\mathbf{x}^{\omega}+\cdot\cdot\\
&\quad+\left[\mathbf{y}^{p}\cdot(\mathbf{x}^{p})^{t}\right]\cdot\mathbf{x}^{\omega}\\
\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}^{\omega} &= \mathbf{y}^{1}\cdot\left[(\mathbf{x}^{1})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right]+\mathbf{y}^{2}\cdot\left[(\mathbf{x}^{2})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right]+\cdots+\mathbf{y}^{\omega}\cdot\left[(\mathbf{x}^{\omega})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right]+\cdot\cdot\\
&\quad+\mathbf{y}^{p}\cdot\left[(\mathbf{x}^{p})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right]
\end{aligned}$$

Y esto último se puede escribir de la siguiente manera, usando de nuevo la notación sumatoria:

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}^{\omega}=\mathbf{y}^{\omega}\cdot\left[(\mathbf{x}^{\omega})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right]+\sum_{\mu\neq\omega}\mathbf{y}^{\mu}\cdot\left[(\mathbf{x}^{\mu})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right] \tag{4.5}$$

La forma de la expresión 4.5 nos permite investigar las condiciones que deben cumplir para que el método de recuperación propuesto dé como resultado salidas perfectas. Para que la expresión anterior arroje como resultado al patrón $\mathbf{y}^{\omega}$, es preciso que se cumplan dos igualdades:

a) $\left[(\mathbf{x}^{\omega})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right]=1$
b) $\left[(\mathbf{x}^{\mu})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}\right]=0$ siempre que $\mu\neq\omega$

Dado que ω se escogió arbitrariamente, las dos igualdades se deben cumplir $\forall\omega\in\{1,2,...,p\}$, lo cual indica que los vectores de entrada deben ser ortonormales. Esta condición de ortonormalidad se puede resumir en la siguiente expresión:

$$(\mathbf{x}^{\mu})^{t}\cdot\mathbf{x}^{\omega}=\delta_{\mu\omega}=\begin{cases}1 \text{ si } \mu=\omega\\ \\ 0 \text{ si } \mu\neq\omega\end{cases} \tag{4.6}$$

donde $\delta_{\mu\omega}$ es la conocida *delta de Kronecker* (Moore, 1968).

Si se cumple la condición que se manifiesta en la expresión 4.6, entonces la recuperación es perfecta; es decir, la expresión 4.5 toma la forma $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^{\omega} = \mathbf{y}^{\omega}$.

Sin embargo, si los vectores de entrada no son ortonormales, suceden dos cosas:

· el factor $\left[(\mathbf{x}^{\omega})^t \cdot \mathbf{x}^{\omega}\right]$ no es 1

· el término $\sum_{\mu \neq \omega} \mathbf{y}^{\mu} \cdot \left[(\mathbf{x}^{\mu})^t \cdot \mathbf{x}^{\omega}\right]$ no es 0

Este último término, llamado *cross-talk*, representa el ruido producido por la interacción entre los patrones de entrada, y tiene como consecuencia inmediata que la recuperación no es perfecta, excepto si el número de patrones almacenados es pequeño comparado con la dimensión n de los vectores de entrada. Algunos investigadores afirman que ese número pequeño de patrones debe estar entre $0{,}1n$ y $0{,}2n$ (Anderson & Rosenfeld, 1990; Hassoun, 1995; Ritter, Sussner & Díaz-de-León, 1998).

Ejemplo.

Ejemplifiquemos el funcionamiento del *Linear Associator* con tres parejas de patrones ($p = 3$). Los patrones de entrada son de dimensión 3 y los de salida, de dimensión 5, lo cual significa que $n = 3$ y $m = 5$; además, los tres vectores de entrada con la expresión 4.6, es decir, son vectores ortonormales:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos los términos $\mathbf{y}^{\mu} \cdot (\mathbf{x}^{\mu})^t$ usando la expresión 4.1:

$$\mathbf{y}^1 \cdot (\mathbf{x}^1)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^2 \cdot (\mathbf{x}^2)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0.1.0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^3 \cdot (\mathbf{x}^3)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0.0.1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se obtiene la memoria **M** a partir de las expresiones 4.2 y 4.3:

$$\mathbf{M} = \sum_{\mu=1}^{3} \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \sum_{\mu=1}^{3} \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Se usa la expresión 4.4 para recuperar los patrones de salida. Obsérvese que las tres recuperaciones son perfectas, porque se cumple la condición de ortonormalidad en los patrones de entrada.

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^1 = \left[\sum_{\mu=1}^{3} \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t \right] \cdot \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{y}^1$$

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}^2 = \left[\sum_{\mu=1}^{3}\mathbf{y}^{\mu}\cdot(\mathbf{x}^{\mu})^t\right]\cdot\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{y}^2$$

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}^3 = \left[\sum_{\mu=1}^{3}\mathbf{y}^{\mu}\cdot(\mathbf{x}^{\mu})^t\right]\cdot\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{y}^3$$

A continuación veremos los devastadores efectos que tiene, en la fase de recuperación, un término de *cross-talk* diferente de cero; para ello, se añadirá una nueva asociación al conjunto fundamental, con la propiedad de que el patrón de entrada de la nueva pareja no es ortonormal a los tres patrones originales.

Ahora el valor de p se incrementa a 4 con la pareja siguiente:

$$\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El término $\mathbf{y}^4\cdot\left(\mathbf{x}^4\right)^t$ resulta ser:

$$\mathbf{y}^4\cdot\left(\mathbf{x}^4\right)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot(1,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

La nueva memoria, denotada por $\mathbf{M}_{4parejas}$ se calcula a partir de las expresiones ?? y 4.8:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{4parejas} &= \mathbf{M} + \mathbf{y}^4 \cdot (\mathbf{x}^4)^t \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Intentemos recuperar los cuatro patrones:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{4parejas} \cdot \mathbf{x}^1 &= \left[\sum_{\mu=1}^{4} \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t \right] \cdot \mathbf{x}^1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{y}^1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{4parejas} \cdot \mathbf{x}^2 &= \left[\sum_{\mu=1}^{4} \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t \right] \cdot \mathbf{x}^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{y}^2
\end{aligned}
$$

$$M_{4parejas} \cdot \mathbf{x}^3 = \left[\sum_{\mu=1}^{4} \mathbf{y}^{\mu} \cdot (\mathbf{x}^{\mu})^t\right] \cdot \mathbf{x}^3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{y}^3$$

$$M_{4parejas} \cdot \mathbf{x}^4 = \left[\sum_{\mu=1}^{4} \mathbf{y}^{\mu} \cdot (\mathbf{x}^{\mu})^t\right] \cdot \mathbf{x}^4$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{y}^4$$

Y así se termina el encanto del *Linear Associator*.

4.3. Consideraciones finales del capítulo.

En este capítulo hemos presentado el *Linear Associator*, un modelo pionero de memoria asociativa, producto del trabajo de dos grandes científicos en este campo: el neurofisiólogo estadunidense James A. Anderson con su *Interactive Memory* (Anderson, 1972), y el físico e ingeniero eléctrico finlandés Teuvo Kohonen, con sus *Correlation Matrix Memories* (Kohonen, 1972).

Anderson ha continuado activo, hasta la fecha, en los campos de las memorias asociativas y de las redes neuronales; él y Edward Rosenfeld se dieron a la tarea de editar uno de los compendios de Neurocomputación más importantes de todos los tiempos: *Neurocomputing: Foundations of Research* (Anderson & Rosenfeld (Eds.), 1990), cuya segunda parte *Neurocomputing: Directions for Research* (en colaboración con Andras Pellionisz) apareció en 1993.

Por su parte, Kohonen se ha convertido en un prolífico autor de artículos y libros relacionados con la generación constante de nuevos conceptos e inventos, de gran trascendencia en los ámbitos científico, ingenieril e industrial (Kohonen, T., 1972; Kohonen, T., 1974; Kohonen, T., 1987; Kohonen, T., 1989; Kohonen, T., 1997). Así, este ilustre personaje ha dado a conocer la DAM (distributed associative memory), los OAM (optimal associative mappings), el LSM (learning subspace method), los SOMs (self-organizing feature maps), la LVQ (learning vector quantization), el RHA (redundant hash addressing) y el ASSOM (Adaptive-Subspace SOM).

Recientemente, Kohonen ha desarrollado una nueva arquitectura de SOM para minería de datos, el WEBSOM, que permite organizar hasta siete millones de documentos en un millón de redes neuronales

websom.hut.fi/websom/